Université de Versailles - Saint Quentin **Année 2017/2018**
L3 Algèbre **Maria Chlouveraki**

Idéaux et anneaux quotients - TD 3

1. Soit $f : R \to S$ un épimorphisme d'anneaux et soit I un idéal de R. Montrer que $f(I)$ est un idéal de S.

2. Soient $m, n \in \mathbb{Z}$. Si m divise n, alors $n\mathbb{Z} \subseteq m\mathbb{Z}$.

3. Soient $m, n \in \mathbb{Z}$. Montrer que $n\mathbb{Z} = m\mathbb{Z}$ si et seulement si $n = \pm m$.

4. Soient $f(x), g(x) \in \mathbb{C}[x] \setminus \{0\}$. Montrer que $(f(x)) = (g(x))$ si et seulement si $f(x) = \lambda g(x)$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

5. Soit A un sous-ensemble d'un anneau R. Montrer que (A) est l'intersection de tous les idéaux de R qui contiennent A. En déduire que (A) est le plus petit idéal de R qui contient A.

6. Soient $m, n \in \mathbb{Z}$, et $I = (m, n)$ l'idéal de $\mathbb{Z}$ engendré par m et n. Montrer que $(m, n) = (\mathrm{pgdc}(m, n))$ (utiliser le fait que $\mathrm{pgdc}(m, n) = am + bn$ pour certains $a, b \in \mathbb{Z}$).

7. Montrer que l'idéal $(2, x)$ de $\mathbb{Z}[x]$ n'est pas principal.

8. Pour les idéaux principaux $I = (m)$ et $J = (n)$ de $\mathbb{Z}$ (avec $mn \neq 0$), calculer les idéaux $I \cap J$, $I + J$ et IJ.

9. Soit R un anneau et $a \in R$. Montrer que l'anneau $R[x]/(x - a)$ est isomorphe à R.

10. Soit R un anneau. Montrer que l'anneau $R[x, y]/(x^2 - y)$ est isomorphe à $R[x]$.

11. Montrer que l'anneau $\mathbb{Z}[x]/(x^2 + 1)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}[i]$.

12. Montrer que l'anneau $\mathbb{R}[x]/(x^2 + 1)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.